神经网络中复值运算的逼近和学习理论研究

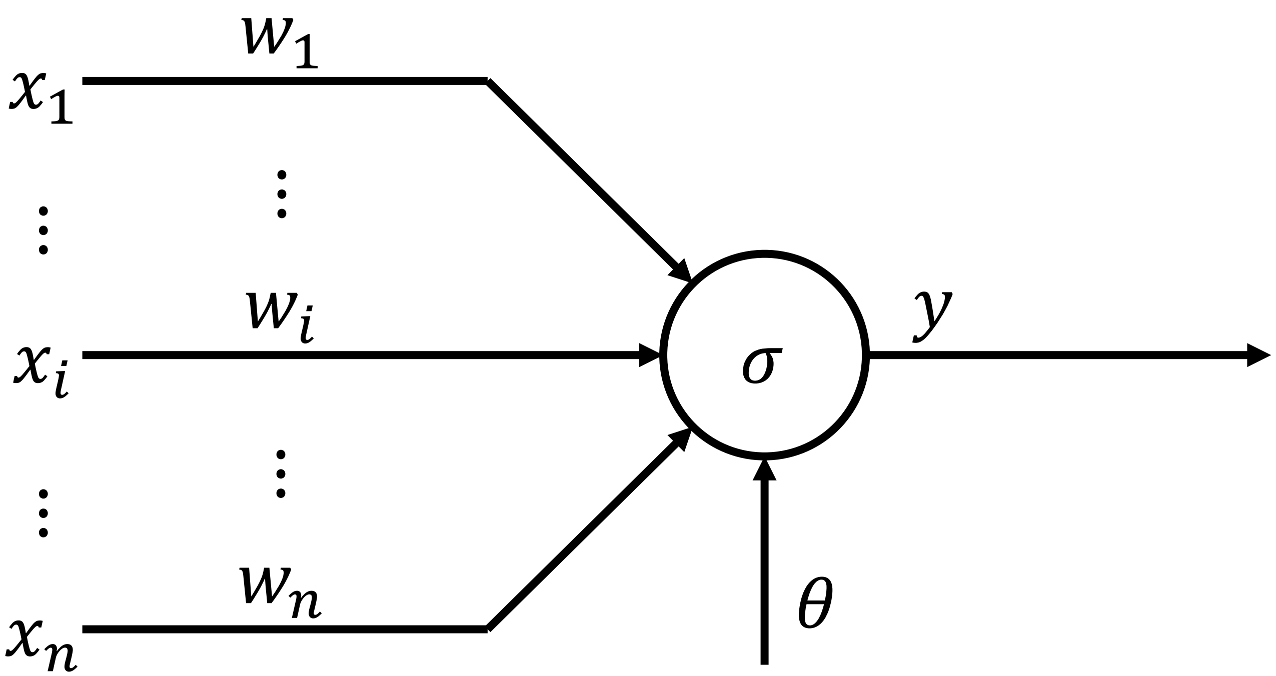
吴锦辉

苏州大学计算机科学与技术学院

https://wujh-nju-suda.github.io/

Email: wujinhui@suda.edu.cn

复值神经元



复值神经元

复值输入$\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$

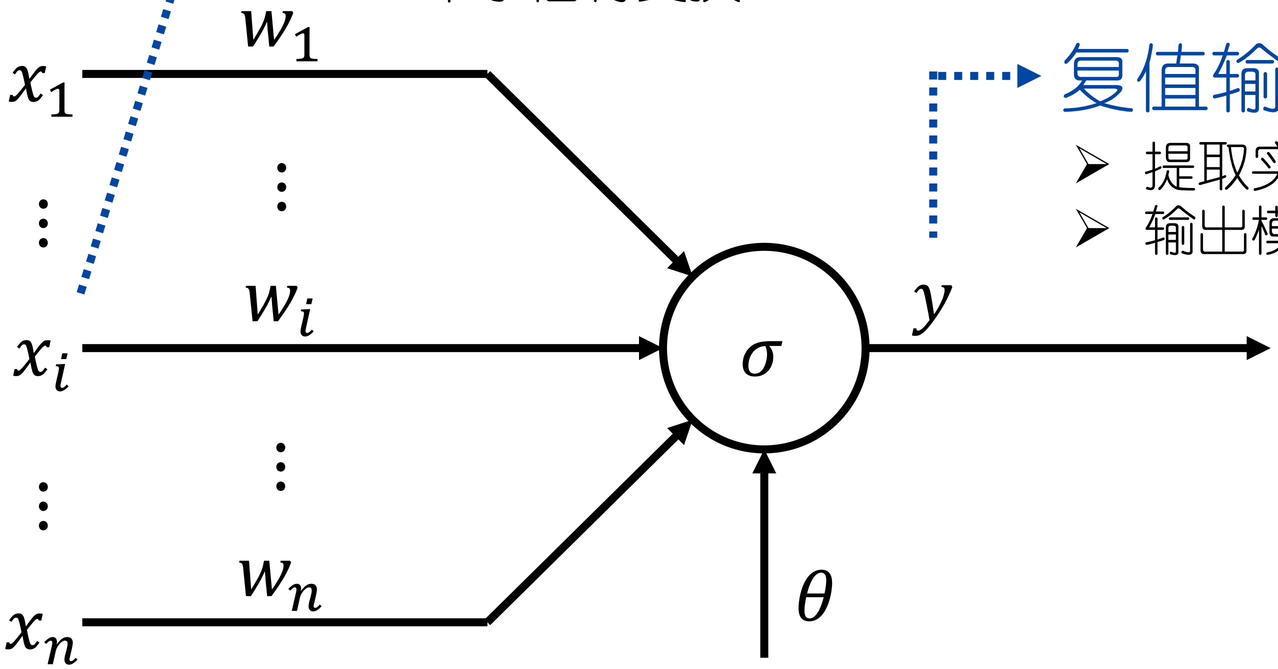
- 零填充
- 希尔伯特变换

复值输出$y \in \mathbb{C}$

- 提取实部
- 输出模长

预处理

后处理



复值神经元

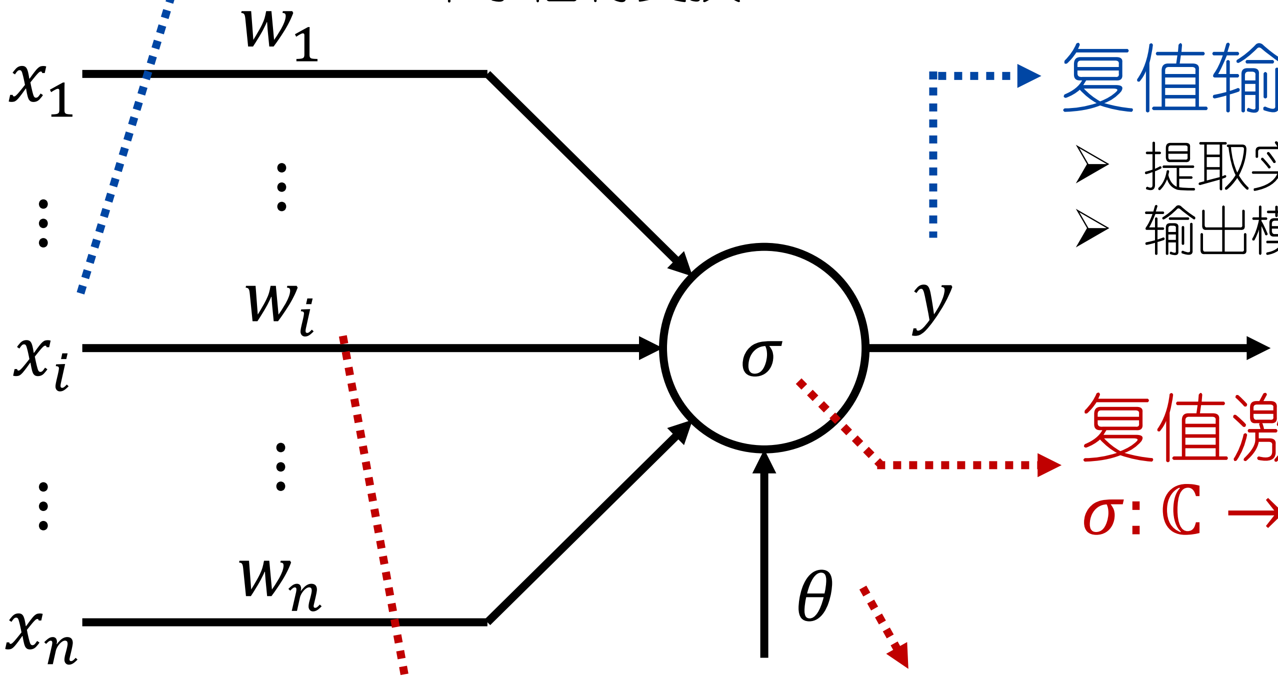
复值输入$\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$

- 零填充
- 希尔伯特变换

复值输出$y \in \mathbb{C}$

- 提取实部
- 输出模长

预处理
后处理



复值激活函数
$\sigma: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

复值参数$\boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^n$和$\theta \in \mathbb{C}$

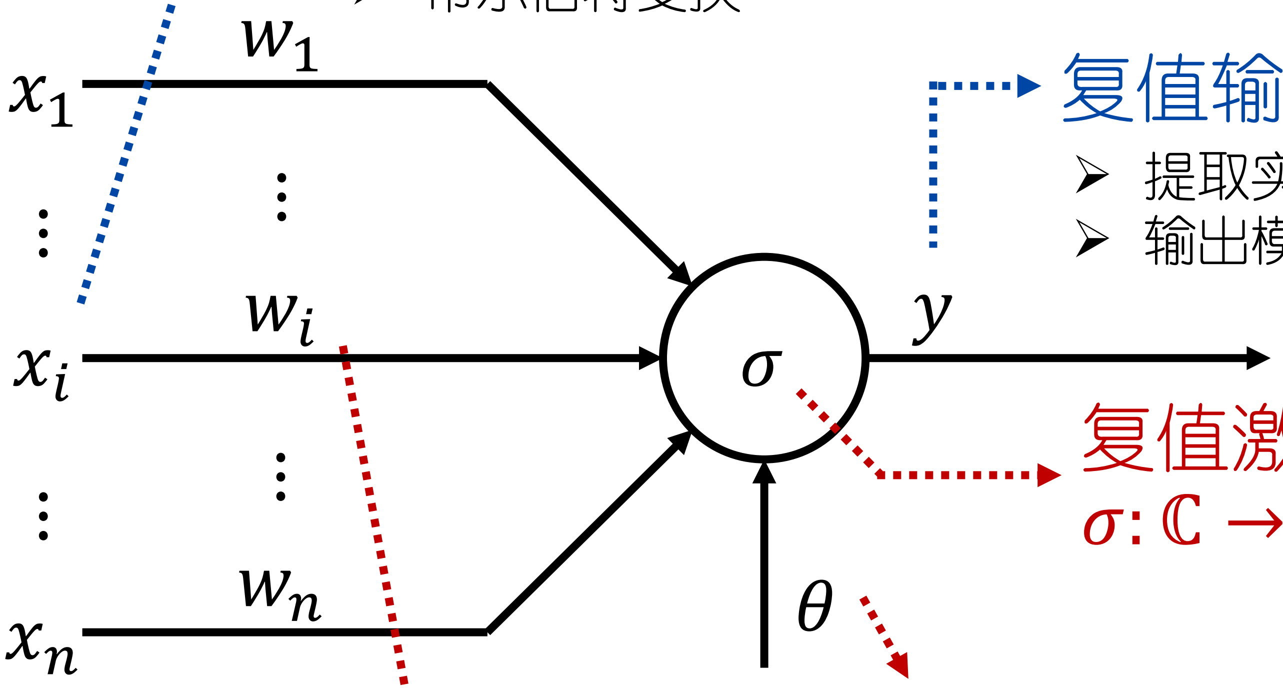
- 复值乘法
- 复值加法

复值
运算

复值神经元

复值输入$\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$

- 零填充
- 希尔伯特变换



复值输出$y \in \mathbb{C}$

- 提取实部
- 输出模长

预处理
后处理

复值激活函数
$\sigma: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

复值参数$\boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^n$和$\theta \in \mathbb{C}$

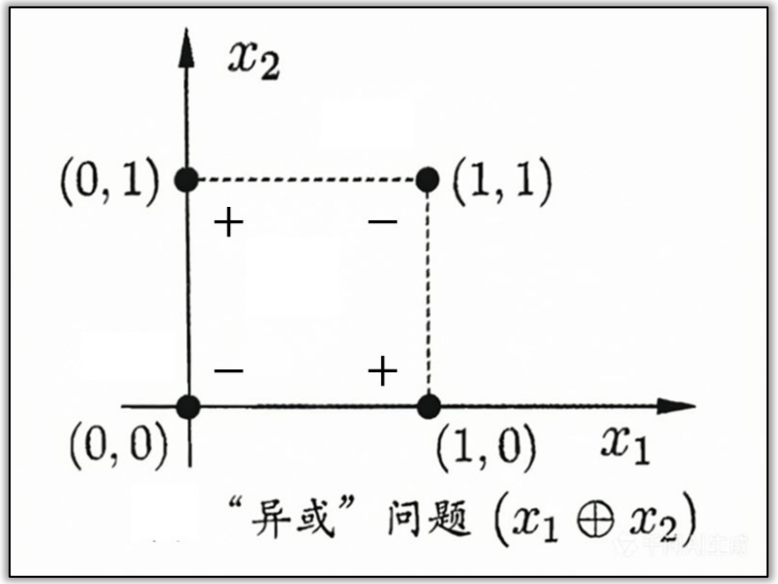
- 复值乘法
- 复值加法

复值
运算

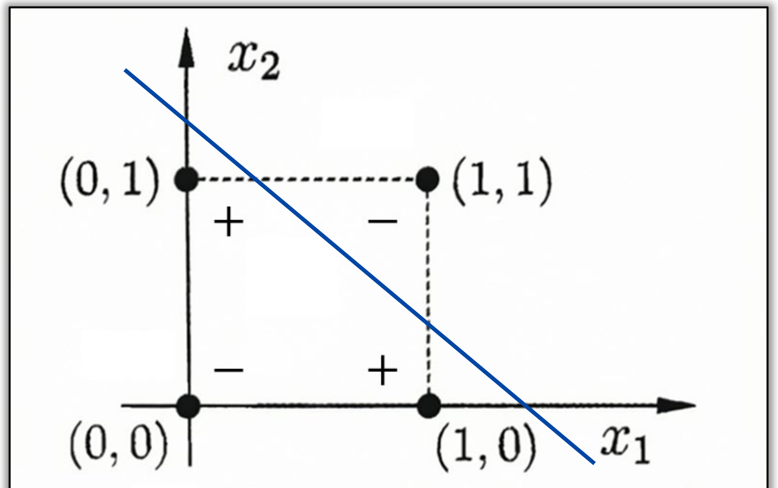
	+	×
复值加法	2	0
复值乘法	2	4

为何要使用计算更复杂的复值运算？

复值运算应用I：异或问题



复值运算应用I：异或问题

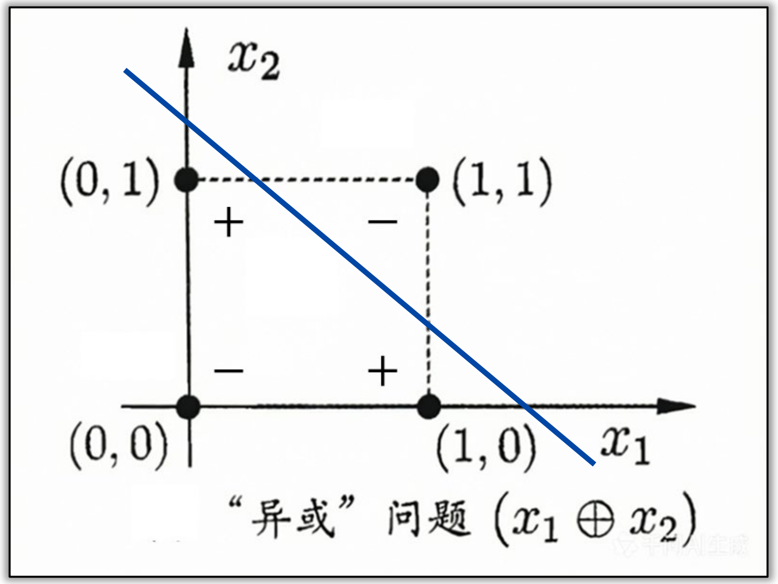


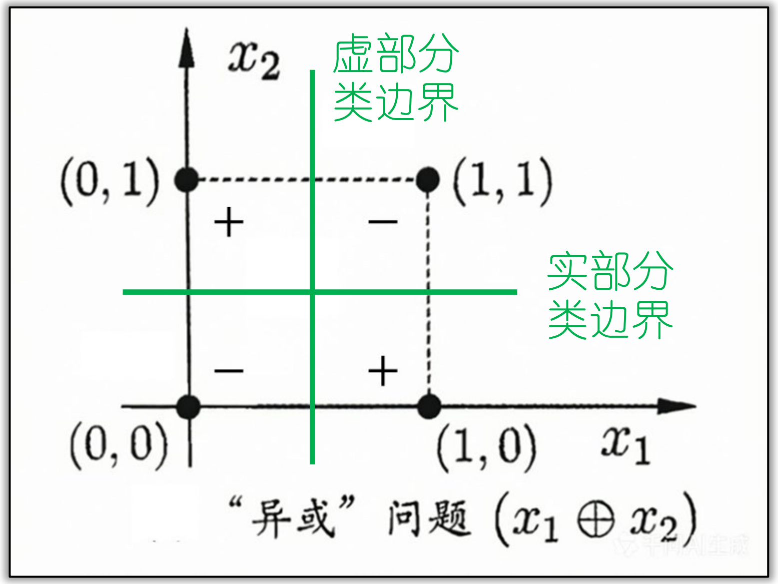
"异或"问题 $(x_1 \oplus x_2)$

感知机：$y = H(w_1x_1 + w_2x_2 + b)$

☹ 感知机无法解决异或问题

复值运算应用I：异或问题





感知机：$y = H(w_1x_1 + w_2x_2 + b)$

☹ 感知机无法解决异或问题

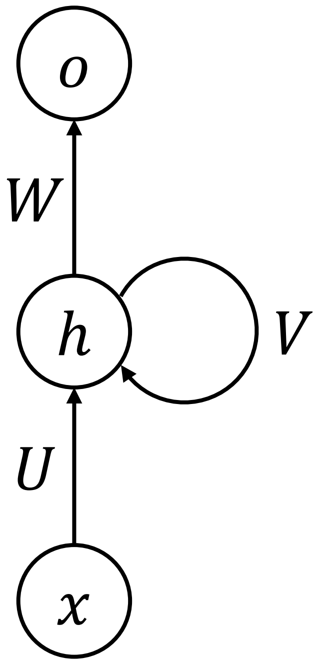
复值神经元：$y = H(w(x_1 + x_2\mathrm{i}) + b)$

☺ 复值神经元可以解决异或问题 [Nitta, 2003]

复值运算有更强的处理非线性任务的能力

[Nitta, 2003] Solving the XOR problem and the detection of symmetry using a single complex-valued neuron

复值运算应用II：循环神经网络

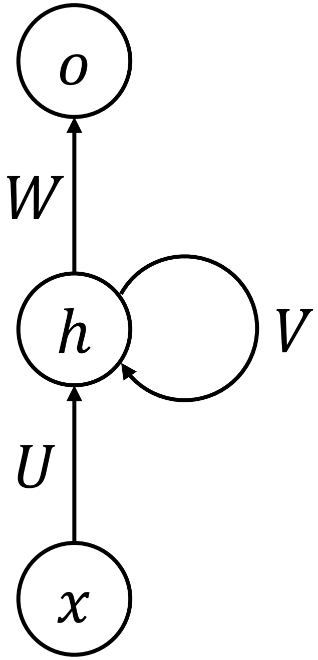


梯度包含V的连乘
→ 梯度消失/爆炸

✓ 正交矩阵是保距变换，可以缓解ReLU网络中的梯度消失/爆炸问题 [Arjovsky et al., 2016]

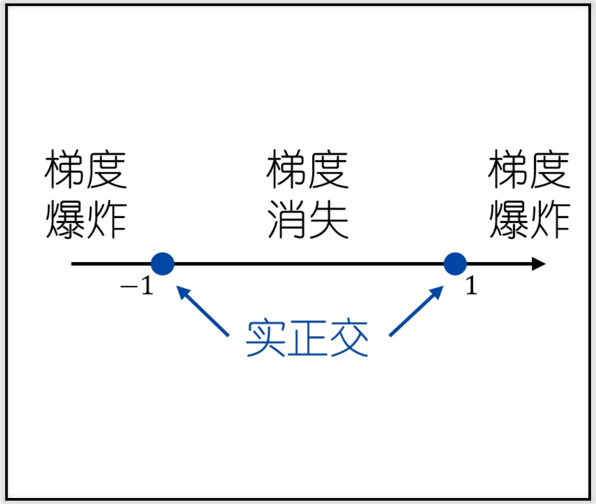
[Arjovsky et al., 2016] Unitary evolution recurrent neural networks

复值运算应用II：循环神经网络



梯度包含V的连乘
→ 梯度消失/爆炸

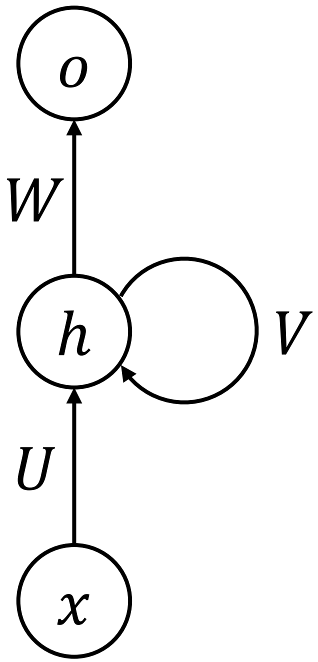
✓ 正交矩阵是保距变换，可以缓解ReLU网络中的梯度消失/爆炸问题 [Arjovsky et al., 2016]



☹ 不连通、难参数化

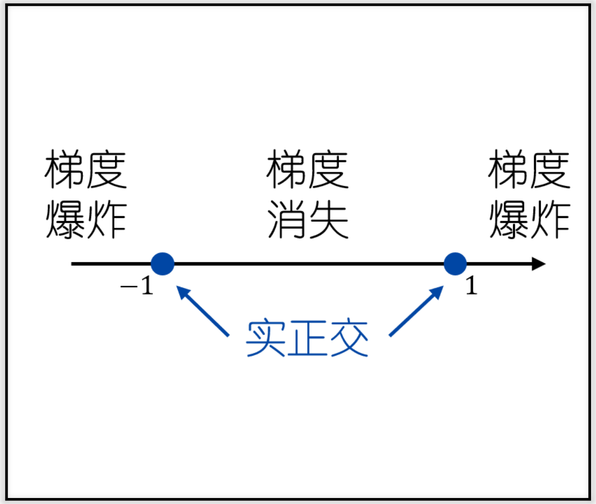
[Arjovsky et al., 2016] Unitary evolution recurrent neural networks

复值运算应用II：循环神经网络

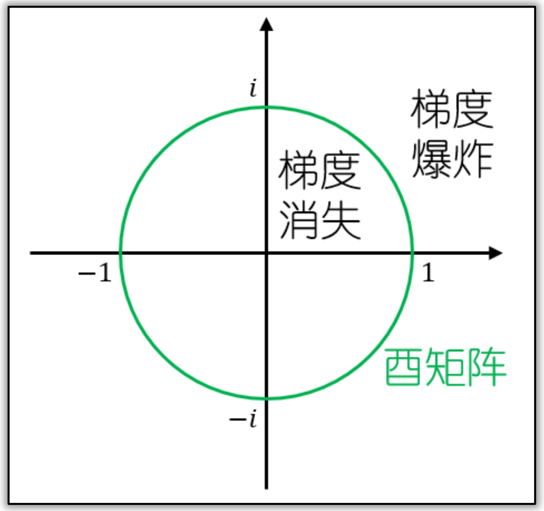


梯度包含V的连乘
→ 梯度消失/爆炸

✓ 正交矩阵是保距变换，可以缓解ReLU网络中的梯度消失/爆炸问题 [Arjovsky et al., 2016]



☹ 不连通、难参数化



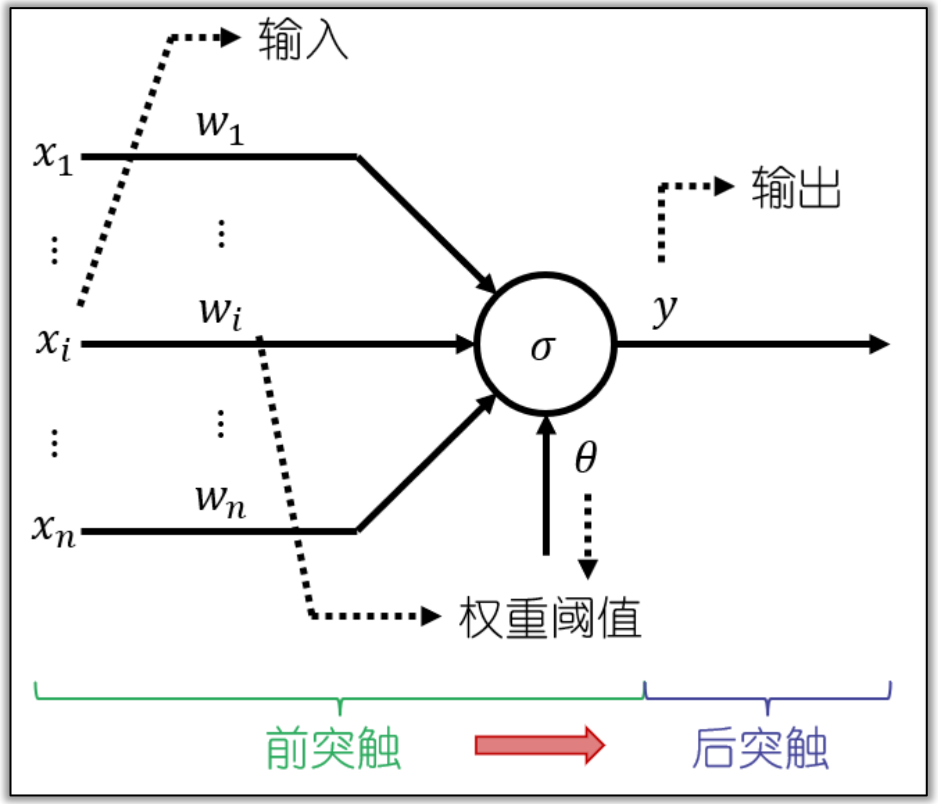
☺ 连通、易参数化

复值正交/酉矩阵有更好的拓扑性质

[Arjovsky et al., 2016] Unitary evolution recurrent neural networks

复值运算应用III：神经元建模

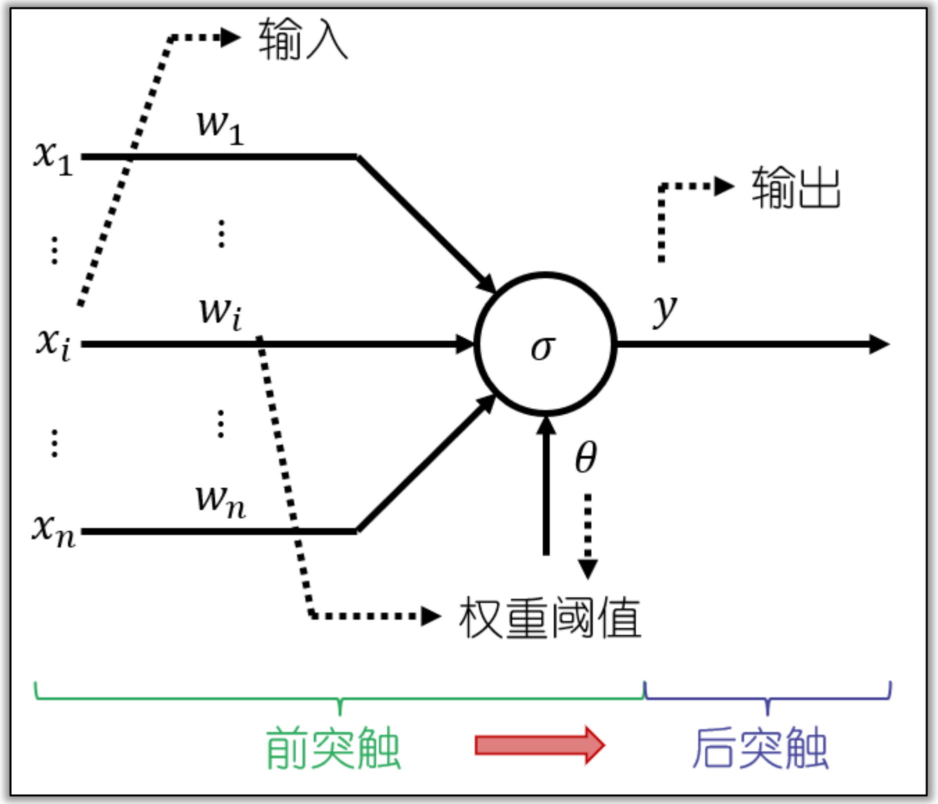
MP神经元 [McCulloch & Pitts, 1943]



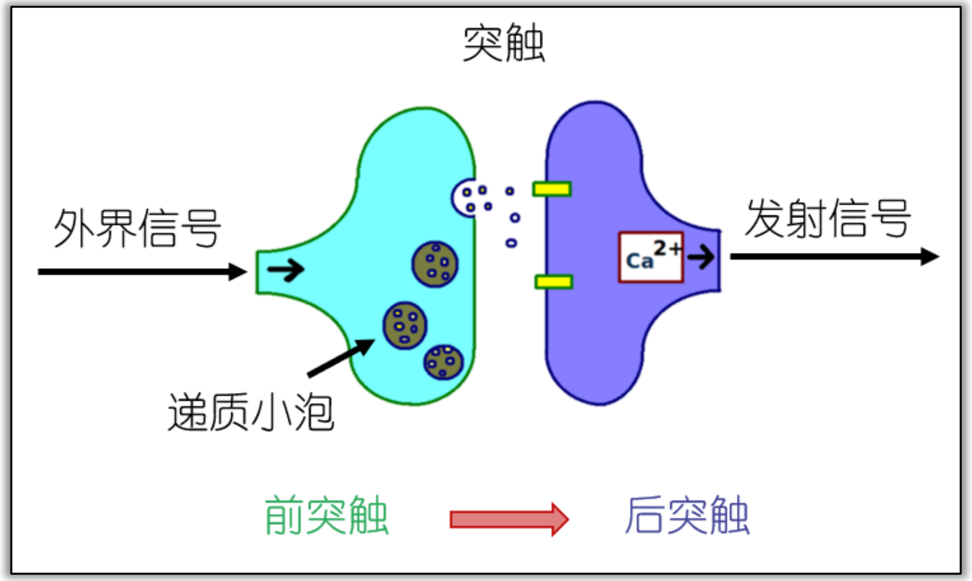
[McCulloch & Pitts, 1943] A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity

复值运算应用III：神经元建模

MP神经元 [McCulloch & Pitts, 1943]



生物神经元



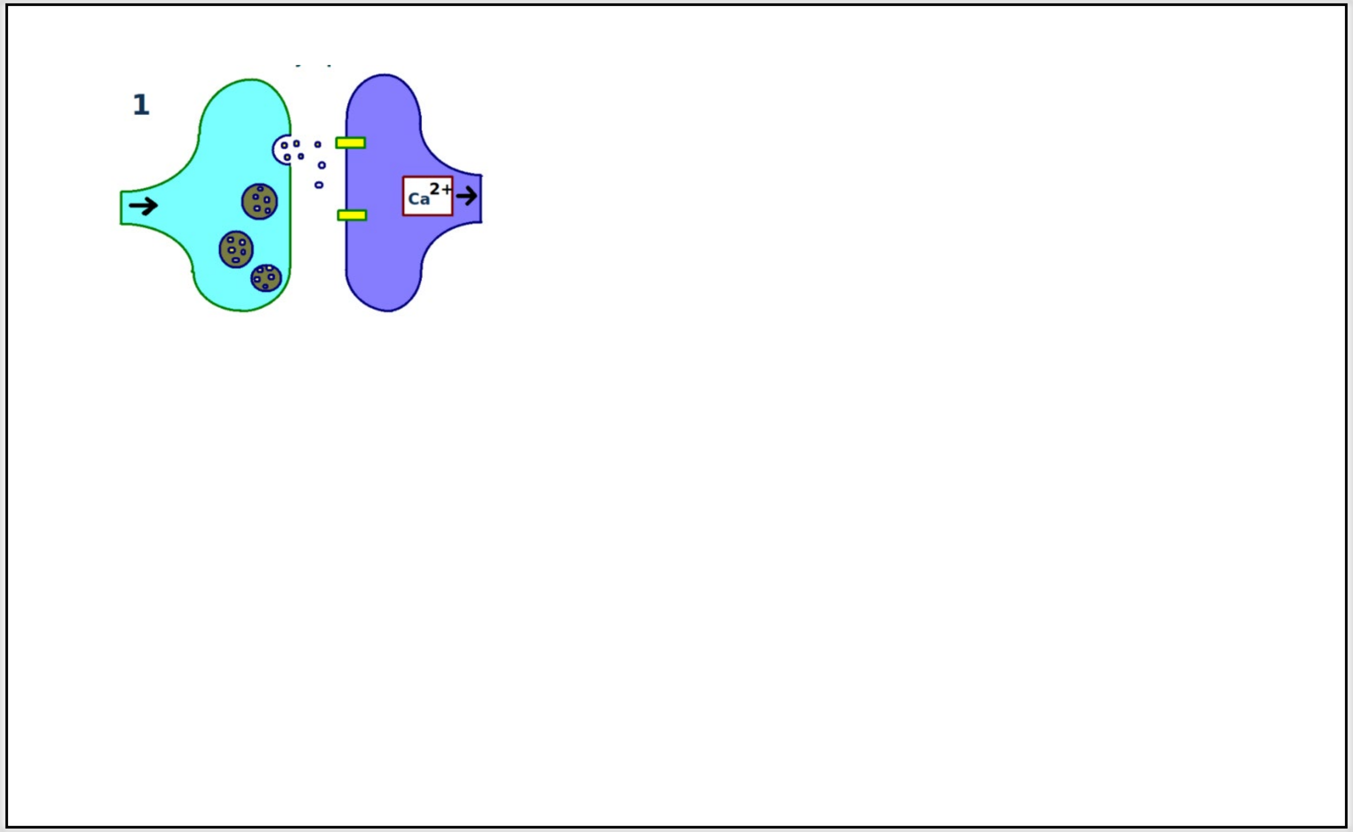
MP神经元建模了前突触到后突触的单向信息传递过程

[McCulloch & Pitts, 1943] A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity

复值运算应用III：神经元建模

生物神经元细胞间存在长程突触可塑性 [Bliss & Lømo, 1973]

- 通信活动会改变突触大小，进而影响后续通信活动，分为长程增强作用和长程抑制作用



[Bliss & Lømo, 1973] Long-lasting potentiation of synaptic transmission in the dentate area of the anaesthetized rabbit following stimulation of the perforant path

复值运算应用III：神经元建模

生物神经元细胞间存在长程突触可塑性 [Bliss & Lømo, 1973]

- 通信活动会改变突触大小，进而影响后续通信活动，分为长程增强作用和长程抑制作用

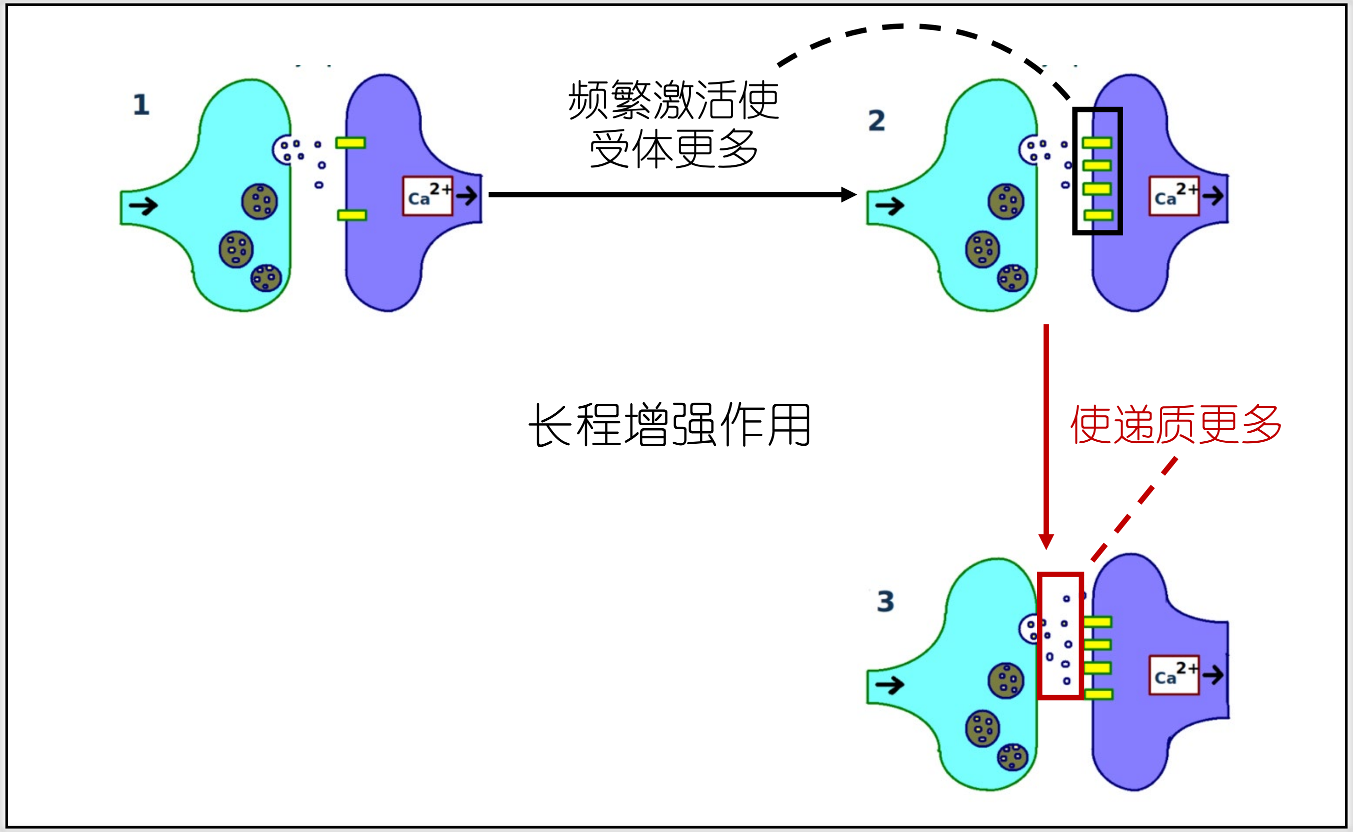
长程增强作用

[Bliss & Lømo, 1973] Long-lasting potentiation of synaptic transmission in the dentate area of the anaesthetized rabbit following stimulation of the perforant path

复值运算应用III：神经元建模

生物神经元细胞间存在长程突触可塑性 [Bliss & Lømo, 1973]

- 通信活动会改变突触大小，进而影响后续通信活动，分为长程增强作用和长程抑制作用

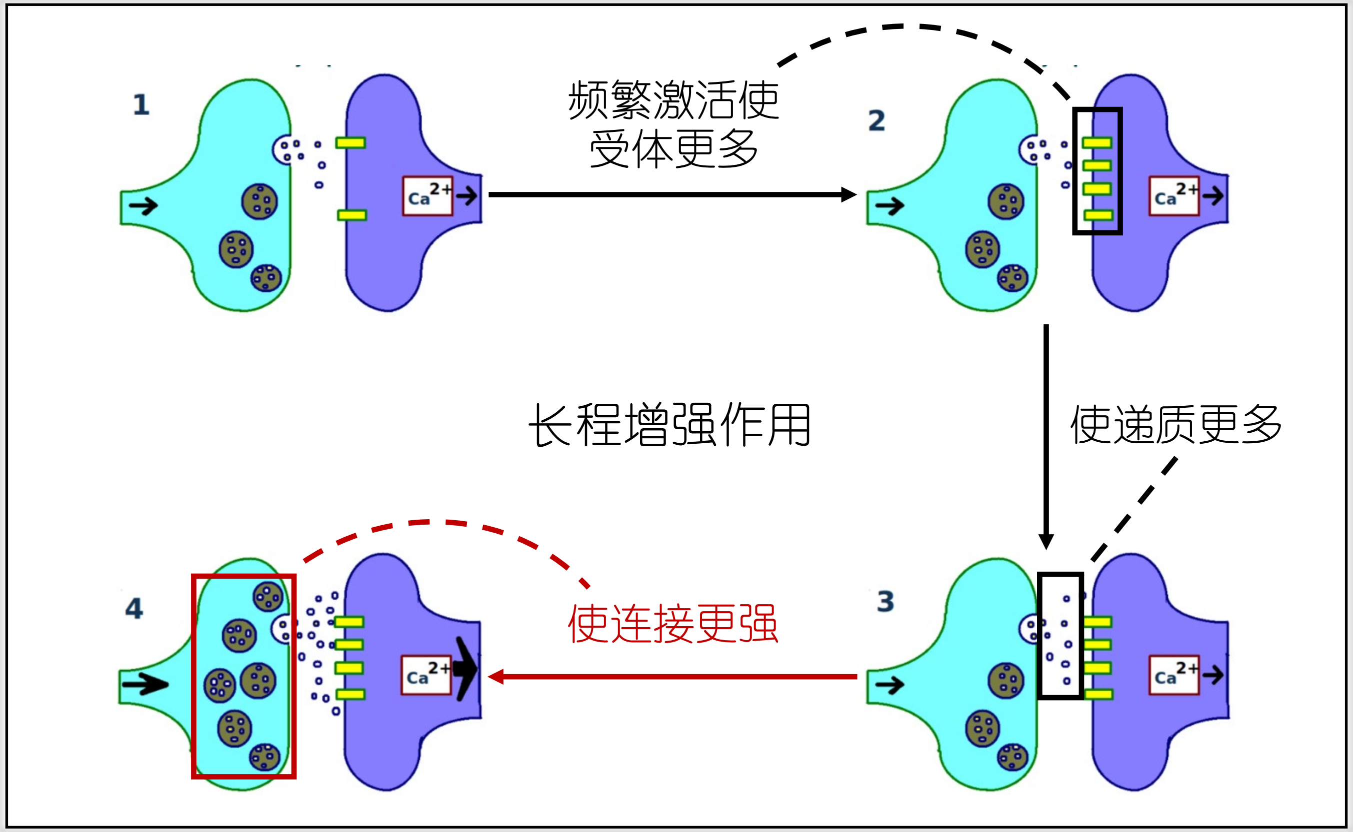


[Bliss & Lømo, 1973] Long-lasting potentiation of synaptic transmission in the dentate area of the anaesthetized rabbit following stimulation of the perforant path

复值运算应用III：神经元建模

生物神经元细胞间存在长程突触可塑性 [Bliss & Lømo, 1973]

- 通信活动会改变突触大小，进而影响后续通信活动，分为长程增强作用和长程抑制作用

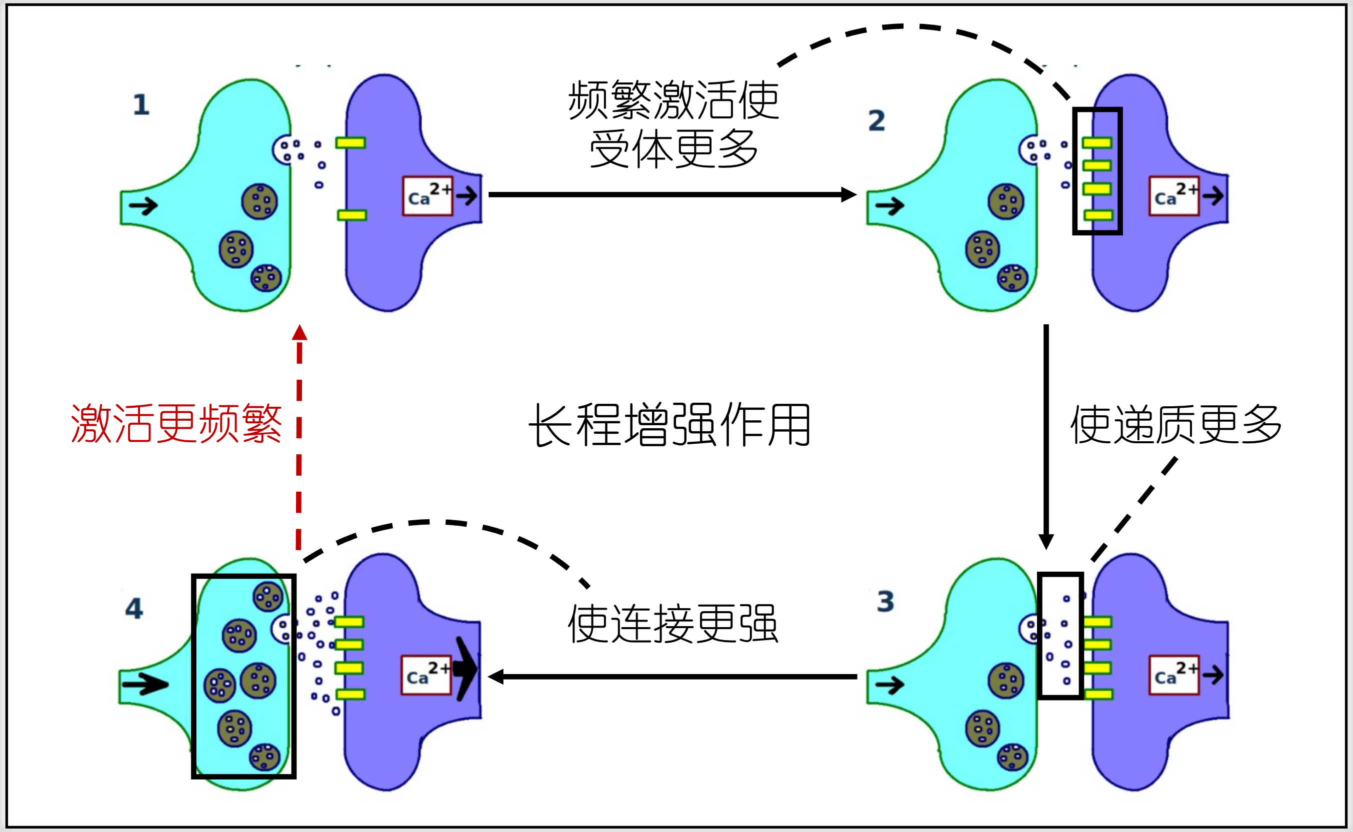


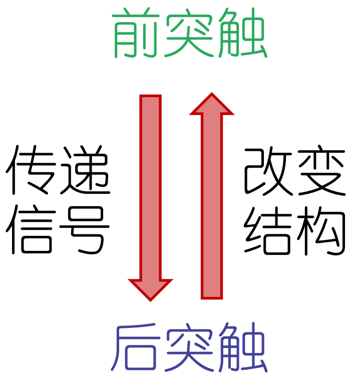
[Bliss & Lømo, 1973] Long-lasting potentiation of synaptic transmission in the dentate area of the anaesthetized rabbit following stimulation of the perforant path

复值运算应用III：神经元建模

生物神经元细胞间存在长程突触可塑性 [Bliss & Lømo, 1973]

- 通信活动会改变突触大小，进而影响后续通信活动，分为长程增强作用和长程抑制作用





[Bliss & Lømo, 1973] Long-lasting potentiation of synaptic transmission in the dentate area of the anaesthetized rabbit following stimulation of the perforant path

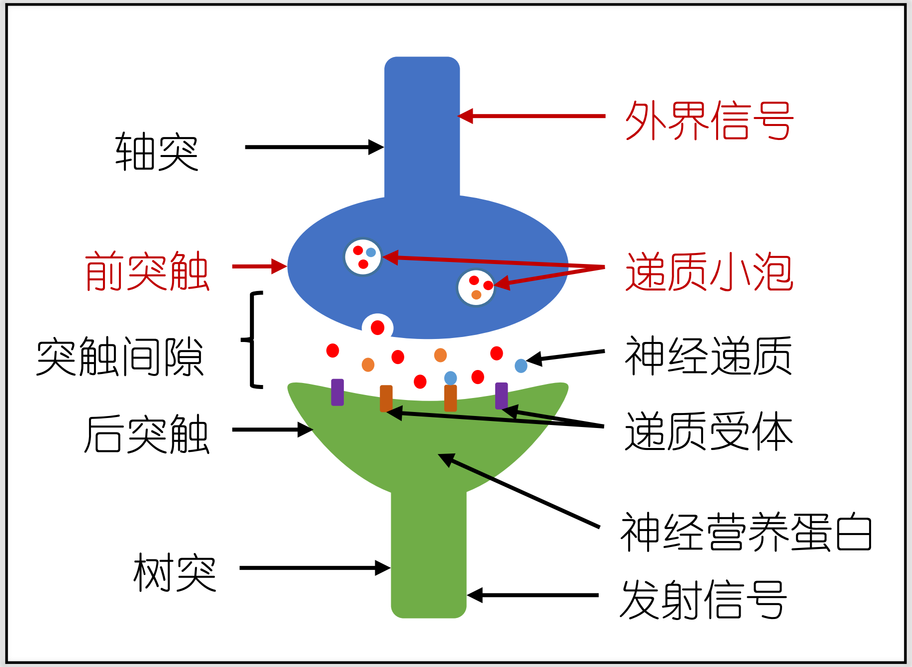
复值运算应用III：神经元建模

灵活递质 (Flexible Transmitter) 神经元模型建模了长程突触可塑性 [Zhang & Zhou, 2021]

外界信号 x_t

小泡浓度 w

前突触建模
信息的传递



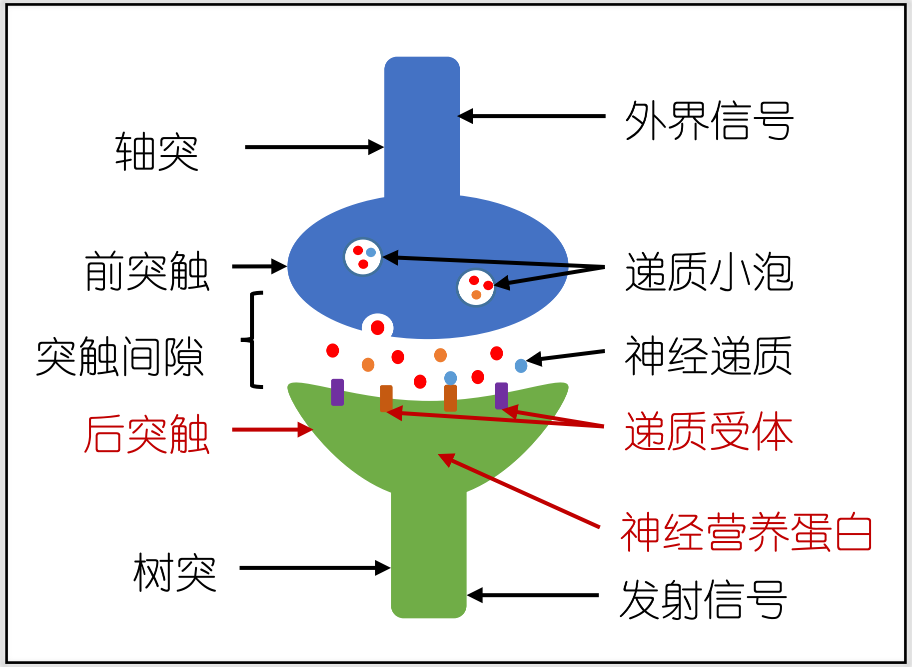
[Zhang & Zhou, 2021] Flexible transmitter network

复值运算应用III：神经元建模

灵活递质 (Flexible Transmitter) 神经元模型建模了长程突触可塑性 [Zhang & Zhou, 2021]

外界信号 x_t
小泡浓度 w
→ 前突触建模
信息的传递

受体强度 v
神经营养蛋白浓度 r_t
→ 后突触建模
结构的变化



[Zhang & Zhou, 2021] Flexible transmitter network

复值运算应用III：神经元建模

灵活递质 (Flexible Transmitter) 神经元模型建模了长程突触可塑性 [Zhang & Zhou, 2021]

外界信号 x_t

小泡浓度 w

前突触建模
信息的传递

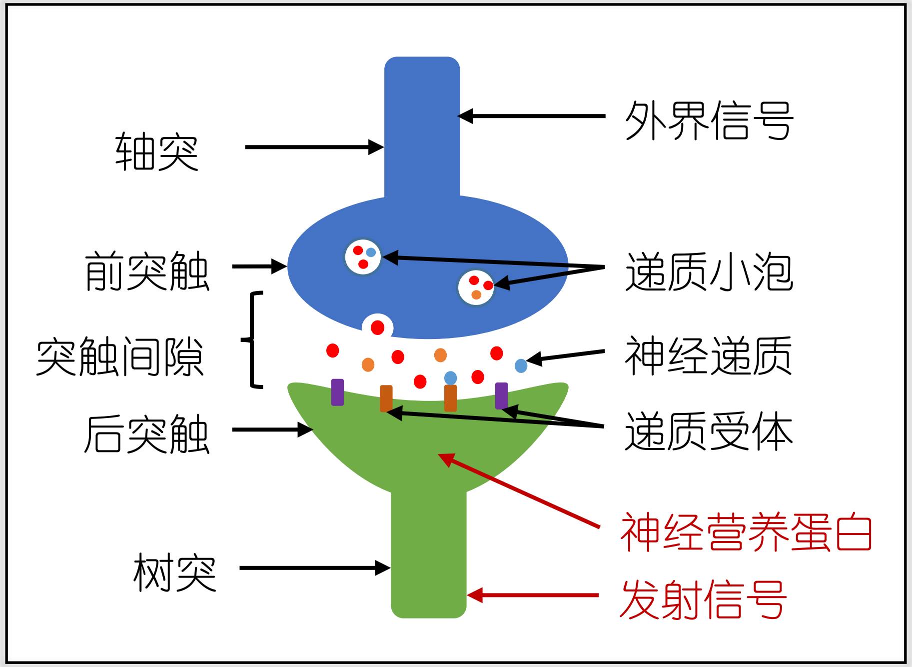
复值激活 $s_t + r_t \mathrm{i}$
$= f(w x_t + v r_{t-1} \mathrm{i})$

受体强度 v

神经营养
蛋白浓度 r_t

后突触建模
结构的变化

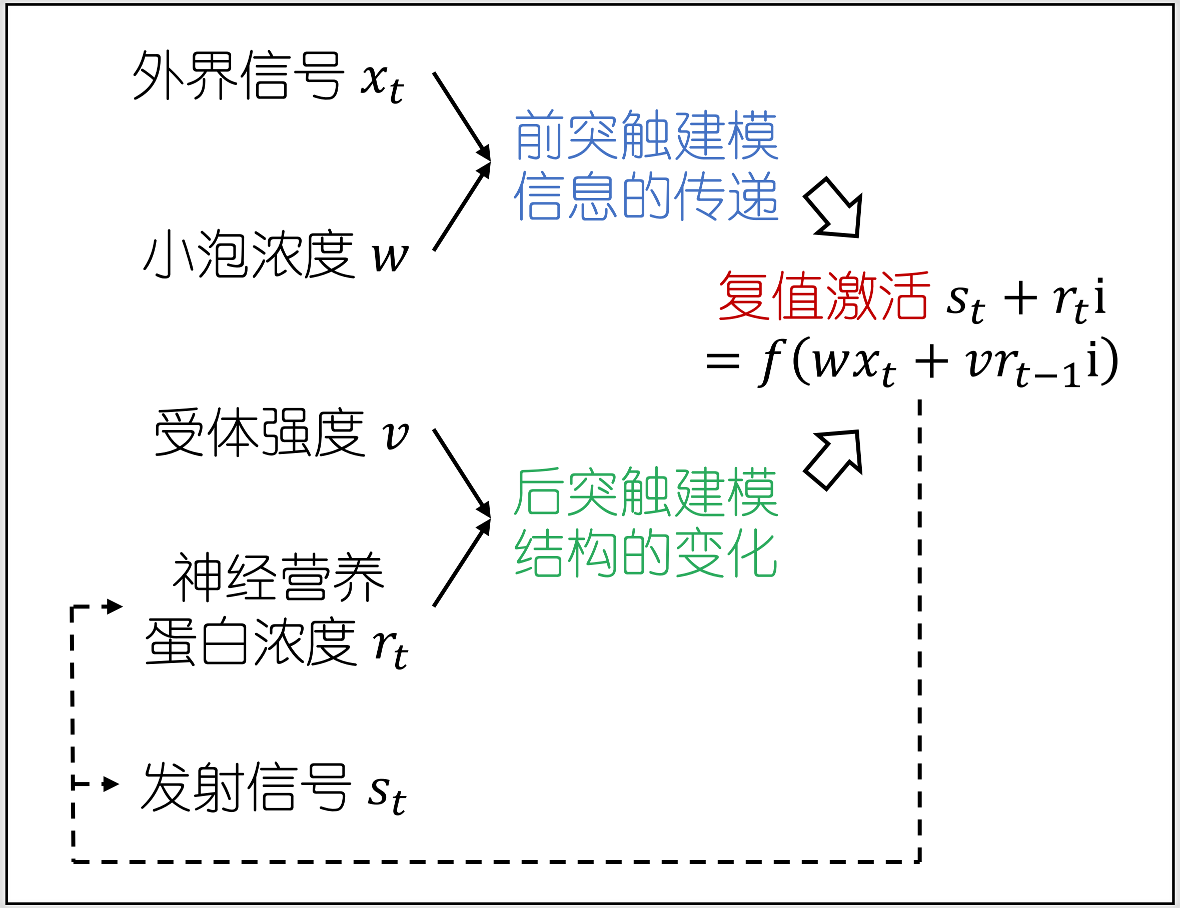
发射信号 s_t

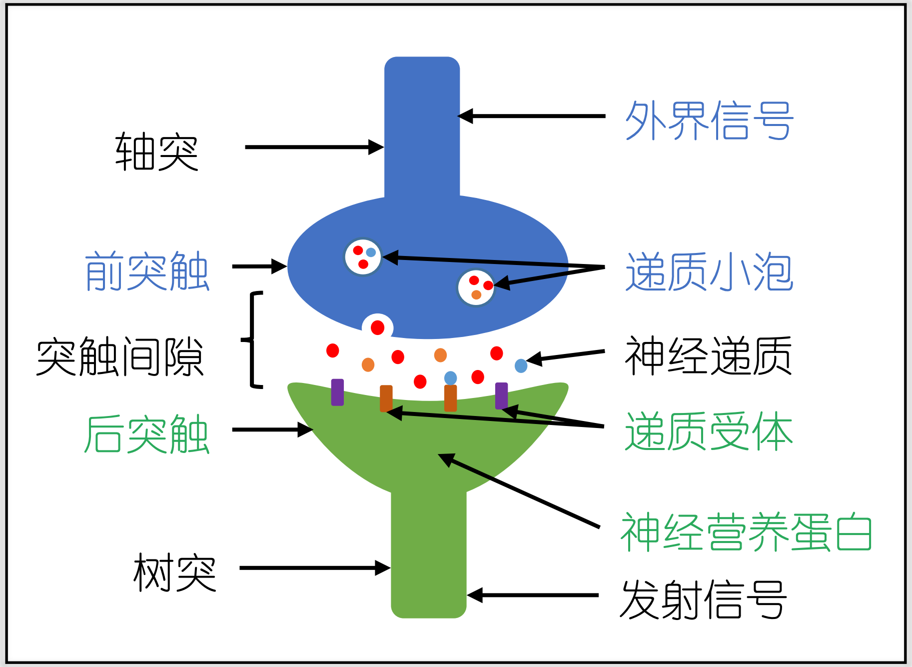


[Zhang & Zhou, 2021] Flexible transmitter network

复值运算应用III：神经元建模

灵活递质 (Flexible Transmitter) 神经元模型建模了长程突触可塑性 [Zhang & Zhou, 2021]





复值运算可提升神经元建模能力和生物合理性

[Zhang & Zhou, 2021] Flexible transmitter network

复值运算的应用

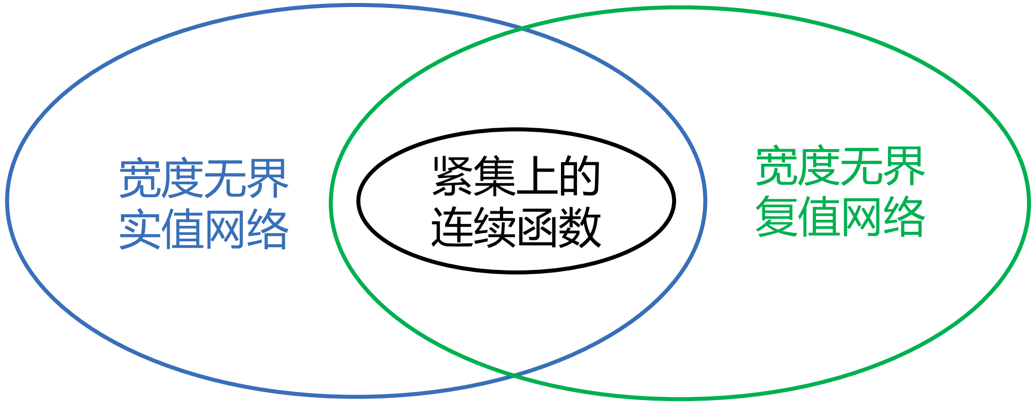
- 异或问题
  - 复值运算能提升神经元处理非线性任务的能力
- 循环神经网络
  - 复值运算能缓解梯度消失和梯度爆炸问题
- 灵活递质神经元
  - 复值运算能提升神经元建模能力和生物合理性
- 傅里叶神经算子 [Li et al., 2021]
  - 利用复值运算和频域表示高效求解偏微分方程
- 旋转位置编码 [Su et al., 2024]
  - 利用复值运算和绝对位置编码实现相对位置的高效计算
- ……

[Li et al., 2021] Fourier neural operator for parametric partial differential equations
[Su et al., 2024] Roformer: Enhanced transformer with rotary position embedding

研究I：复值运算逼近理论

复值和实值神经网络宽度无界时均具有万有逼近性 [Leshno et al., 1993; Voigtlaender, 2023]

➢ 单隐层宽度无界的网络能以任意精度逼近任意紧集上的任意连续函数



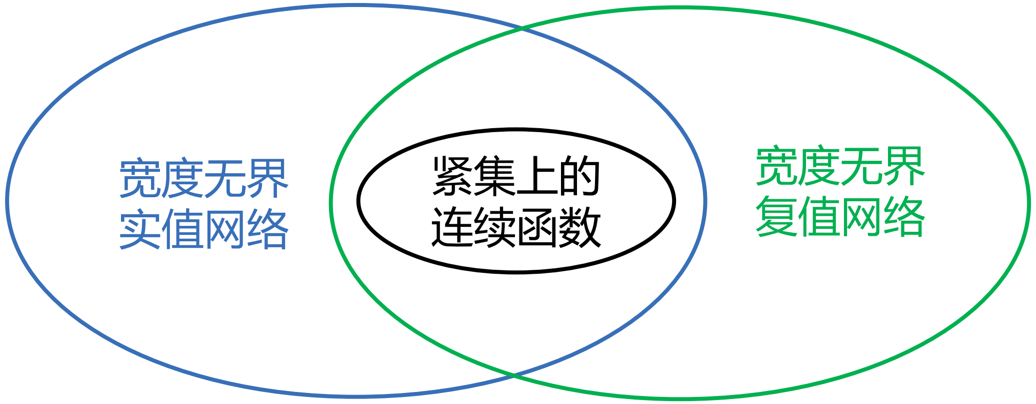
[Leshno et al., 1993] Multilayer feedforward networks with a nonpolynomial activation function can approximate any function
[Voigtlaender, 2023] The universal approximation theorem for complex-valued neural networks

研究I：复值运算逼近理论

复值和实值神经网络宽度无界时均具有万有逼近性 [Leshno et al., 1993; Voigtlaender, 2023]

➢ 单隐层宽度无界的网络能以任意精度逼近任意紧集上的任意连续函数

相比实数域，复数域中单次运算更复杂 ☹



	+	×
复值加法	2	0
复值乘法	2	4

复值运算在宽度有界网络中是否优于实值运算？

[Leshno et al., 1993] Multilayer feedforward networks with a nonpolynomial activation function can approximate any function
[Voigtlaender, 2023] The universal approximation theorem for complex-valued neural networks

研究I：复值运算逼近理论

逼近效率理论：

模型B需要多少参数才能逼近有限参数的模型A？

	模型A	**模型B**	**模型B参数量**
[Eldan and Shamir, 2016]	3层网络	2层网络	指数多
[Telgarsky, 2016]	深而窄的网络	浅而宽的网络	指数多

深层网络具有比浅层网络更高的逼近效率

[Eldan & Shamir, 2016] The power of depth for feedforward neural networks
[Telgarsky, 2016] Benefits of depth in neural networks

研究I：复值运算逼近理论

逼近效率理论：

模型B需要多少参数才能逼近有限参数的模型A？

模型A	模型B	模型B参数量
特定复值网络	实值网络	指数多
任意实值网络	复值网络	同阶

[Zhang et al., 2022; Wu et al., 2024]

✓ 复值运算在特定情形更高效

[Zhang et al., 2022] Towards understanding theoretical advantages of complex-reaction networks
[Wu et al., 2024] Theoretical exploration of flexible transmitter model

研究I：复值运算逼近理论

逼近效率理论：

模型B需要多少参数才能逼近有限参数的模型A？

模型A	模型B	模型B参数量
特定复值网络	实值网络	指数多
任意实值网络	复值网络	同阶

[Zhang et al., 2022; Wu et al., 2024]

✓ 复值运算在特定情形更高效

✓ 复值运算在任意情形不更差

[Zhang et al., 2022] Towards understanding theoretical advantages of complex-reaction networks
[Wu et al., 2024] Theoretical exploration of flexible transmitter model

研究I：复值运算逼近理论

逼近效率理论：

模型B需要多少参数才能逼近有限参数的模型A？

模型A	模型B	模型B参数量
特定复值网络	实值网络	指数多
任意实值网络	复值网络	同阶

[Zhang et al., 2022; Wu et al., 2024]

复值运算可以提升神经网络逼近效率

[Zhang et al., 2022] Towards understanding theoretical advantages of complex-reaction networks
[Wu et al., 2024] Theoretical exploration of flexible transmitter model

研究II：复值激活函数设计

复值激活函数无法同时满足复可微和有界性 ☹

- 实可微和有界性可同时满足，如 sigmoid 和 tanh

刘维尔定理：复可微的有界函数是常值函数

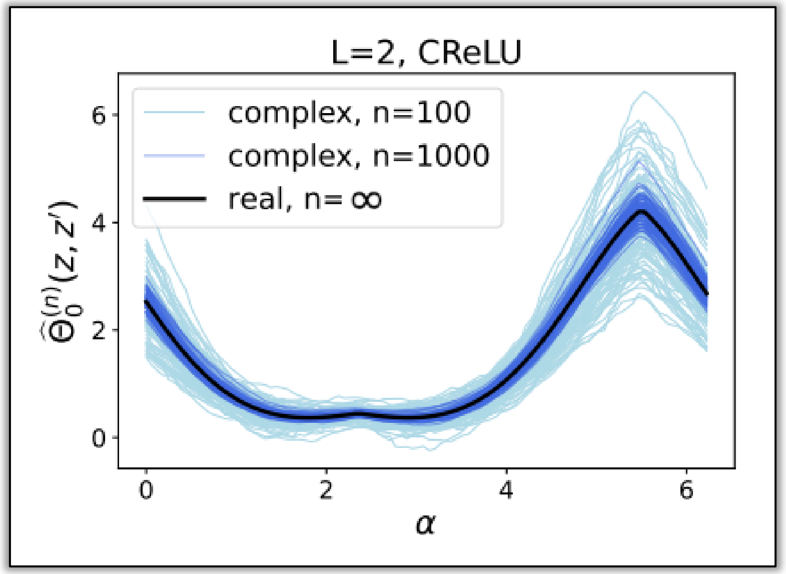
研究II：复值激活函数设计

复值激活函数无法同时满足复可微和有界性 ☹

- 实可微和有界性可同时满足，如 sigmoid 和 tanh

复值ReLU等激活函数使复值网络在NTK意义下和实值网络等价 ☹ [Tan et al., 2022]

- 网络宽、步长小时，复值网络和实值网络优化结果相同



刘维尔定理：复可微的有界函数是常值函数

如何设计性质良好且不同于实值激活的复值激活？

[Tan et al., 2022] Real-valued backpropagation is unsuitable for complex-valued neural networks

研究II：复值激活函数设计

保留复值激活函数的复可微性，舍弃有界性

- 如复值三角函数、双曲函数等 [Kim & Adali, 2001]

Circular:	$\tan z$, $\sin z$
Inverse Circular:	$\mathrm{atan}\, z$, $\mathrm{a}\sin z$, $\mathrm{a}\cos z$
Hyperbolic:	$\tanh z$, $\sinh z$
Inverse Hyperbolic:	$\mathrm{a}\tanh z$, $\mathrm{a}\sinh z$

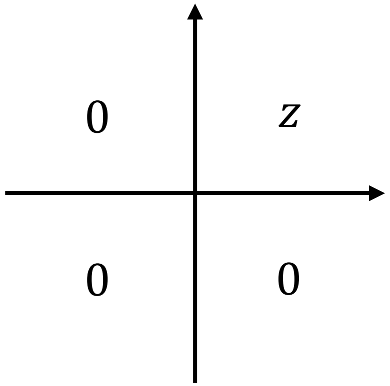
或存在奇点，奇点附近函数值和梯度趋于无穷，难用GD优化 ☹

或不满足万有逼近性质 [Voigtlaender, 2023]，表达能力受限 ☹

[Kim & Adali, 2001] Complex backpropagation neural network using elementary transcendental activation functions
[Voigtlaender, 2023] The universal approximation theorem for complex-valued neural networks

研究II：复值激活函数设计

ReLU激活函数在复数域的拓展

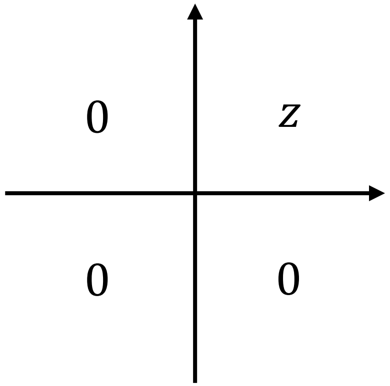


- zReLU： $f(z) = z \cdot \mathbb{I}\left(\theta_z \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ [Guberman, 2016]

[Guberman, 2016] On complex valued convolutional neural networks

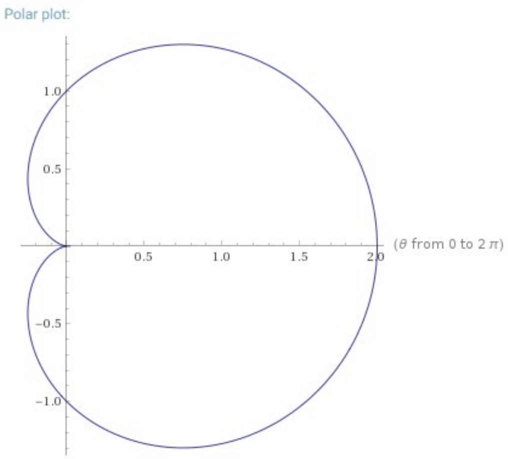
研究II：复值激活函数设计

ReLU激活函数在复数域的拓展



- zReLU： $f(z) = z \cdot \mathbb{I}\left(\theta_z \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ [Guberman, 2016]

- Cardioid： $f(z) = \frac{1}{2} z(1 + \cos\theta_z)$ [Virtue et al., 2017]



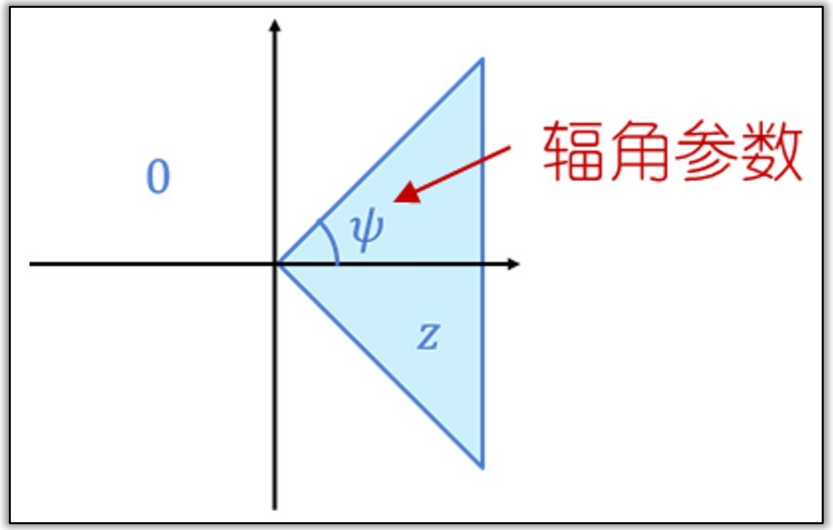
激活函数保留了复值输入的相位信息

[Guberman, 2016] On complex valued convolutional neural networks
[Virtue et al., 2017] Better than real: Complex-valued neural nets for MRI fingerprinting

研究II：复值激活函数设计

带辐角参数的zReLU激活 [Wu et al., 2023]

$$\sigma_\psi(z) = z \cdot \mathbb{I}(\theta_z \in [-\psi, \psi])$$



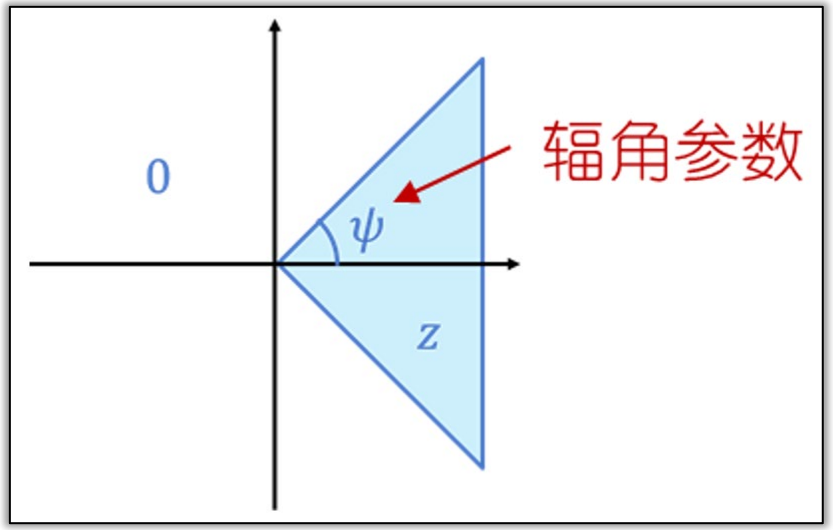
辐角参数可灵活控制激活相位 ☺

[Wu et al., 2023] Complex-valued neurons can learn more but slower than real-valued neurons via gradient descent

研究II：复值激活函数设计

带辐角参数的zReLU激活 [Wu et al., 2023]

$$\sigma_\psi(z) = z \cdot \mathbb{I}(\theta_z \in [-\psi, \psi])$$



辐角参数可灵活控制激活相位 ☺

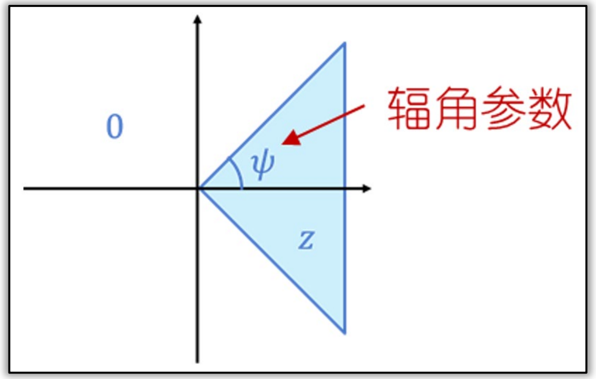
辐角参数和权重参数具有不同的优化性质 ☹

➢ 带有约束$\psi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

辐角参数是否可用经典的GD算法学得？

[Wu et al., 2023] Complex-valued neurons can learn more but slower than real-valued neurons via gradient descent

研究II：复值激活函数设计



考虑使用GD算法的神经元学习问题 [Wu et al., 2023]

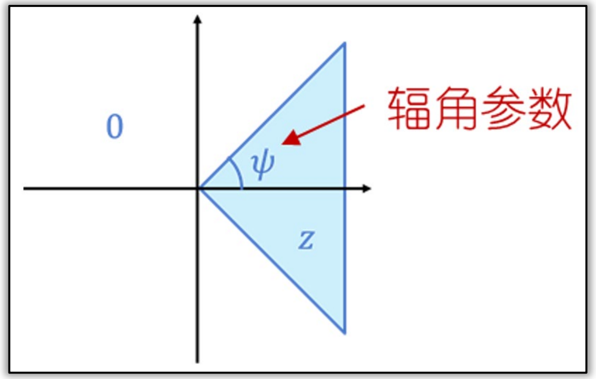
$$L(w,\psi_w) = \mathbb{E}_{x\sim\mathcal{D}}\left[\left(\sigma_{\psi_w}(w^\top\overline{x}) - \sigma_{\psi_v}(v^\top\overline{x})\right)^2\right]$$

- (w,ψ_w)是可学神经元参数，(v,ψ_v)是目标神经元参数

[Wu et al., 2023] Complex-valued neurons can learn more but slower than real-valued neurons via gradient descent

研究II：复值激活函数设计

考虑使用GD算法的神经元学习问题 [Wu et al., 2023]



$$L(w,\psi_w) = \mathbb{E}_{x\sim\mathcal{D}}\left[\left(\sigma_{\psi_w}(w^\top \overline{x}) - \sigma_{\psi_v}(v^\top \overline{x})\right)^2\right]$$

- (w,ψ_w)是可学神经元参数，(v,ψ_v)是目标神经元参数

目标函数	实值神经元	复值神经元
实值神经元	$O(\exp(-ct))$ [Yehudai & Shamir, 2020]	$O(t^{-3})$
复值神经元	无法学习	$O(t^{-1})$

✓ 实值神经元可学的复值神经元也可学

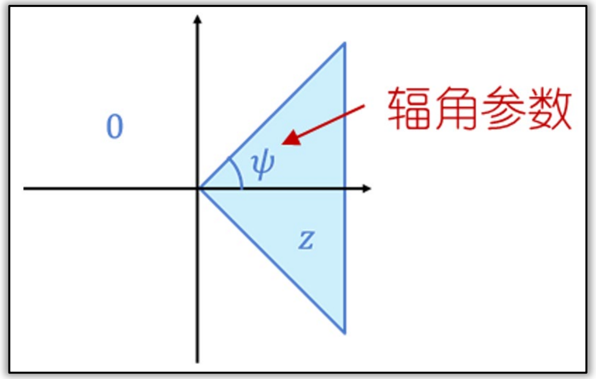
[Wu et al., 2023] Complex-valued neurons can learn more but slower than real-valued neurons via gradient descent
[Yehudai & Shamir, 2020] Learning a single neuron with gradient methods

研究II：复值激活函数设计

考虑使用GD算法的神经元学习问题 [Wu et al., 2023]

$$L(w,\psi_w) = \mathbb{E}_{x\sim\mathcal{D}}\left[\left(\sigma_{\psi_w}(w^\top \overline{x}) - \sigma_{\psi_v}(v^\top \overline{x})\right)^2\right]$$

- (w,ψ_w)是可学神经元参数，(v,ψ_v)是目标神经元参数



目标函数	实值神经元	复值神经元
实值神经元	$O(\exp(-ct))$ [Yehudai & Shamir, 2020]	$O(t^{-3})$
复值神经元	无法学习	$O(t^{-1})$

✓ 实值神经元可学的复值神经元也可学

✓ 复值神经元可学的实值神经元未必可学

复值激活可以提升神经元学习能力

[Wu et al., 2023] Complex-valued neurons can learn more but slower than real-valued neurons via gradient descent
[Yehudai & Shamir, 2020] Learning a single neuron with gradient methods

研究III：复值参数学习算法

考虑使用GD算法的神经元学习问题 [Wu et al., 2023]

$$L(w,\psi_w) = \mathbb{E}_{x\sim\mathcal{D}}\left[\left(\sigma_{\psi_w}(w^\top\overline{x}) - \sigma_{\psi_v}(v^\top\overline{x})\right)^2\right]$$

- (w,ψ_w)是可学神经元参数，(v,ψ_v)是目标神经元参数

目标函数	实值神经元	复值神经元
实值神经元	$O(\exp(-ct))$ [Yehudai & Shamir, 2020]	$\Omega(t^{-3})$

☹ 复值神经元收敛速率更慢

[Wu et al., 2023] Complex-valued neurons can learn more but slower than real-valued neurons via gradient descent
[Yehudai & Shamir, 2020] Learning a single neuron with gradient methods

研究III：复值参数学习算法

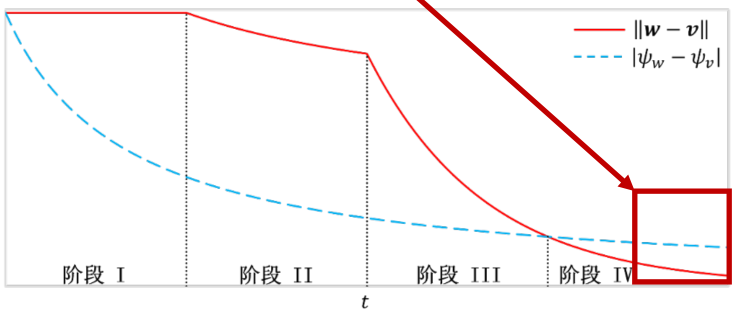
考虑使用GD算法的神经元学习问题 [Wu et al., 2023]

$$L(w,\psi_w) = \mathbb{E}_{x\sim\mathcal{D}}\left[\left(\sigma_{\psi_w}(w^\top \overline{x}) - \sigma_{\psi_v}(v^\top \overline{x})\right)^2\right]$$

➢ (w,ψ_w)是可学神经元参数，(v,ψ_v)是目标神经元参数

目标函数	实值神经元	复值神经元
实值神经元	$O(\exp(-ct))$ [Yehudai & Shamir, 2020]	$\Omega(t^{-3})$

☹ 辐角参数冗余，收敛更慢



如何设计复值参数的高效学习算法？

[Wu et al., 2023] Complex-valued neurons can learn more but slower than real-valued neurons via gradient descent
[Yehudai & Shamir, 2020] Learning a single neuron with gradient methods

研究III：复值参数学习算法

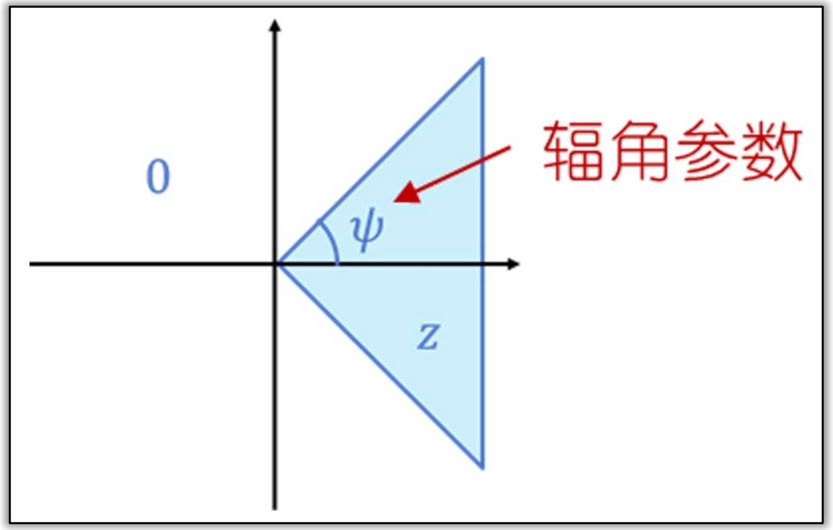
直接使用GD算法优化辐角参数的挑战

☹ 参数的区间约束

- ➢ $\psi \in [0, \pi/2]$

☹ 更慢的收敛速率

- ➢ 全局最优解附近关于ψ近似满足$L \approx (\psi - \psi^*)^3$
- ➢ 高效的线性收敛要求强凸（二次函数）



[Wu et al., 2026] Reparameterized complex-valued neurons can efficiently learn more than real-valued neurons via gradient descent

研究III：复值参数学习算法

直接使用GD算法优化辐角参数的挑战

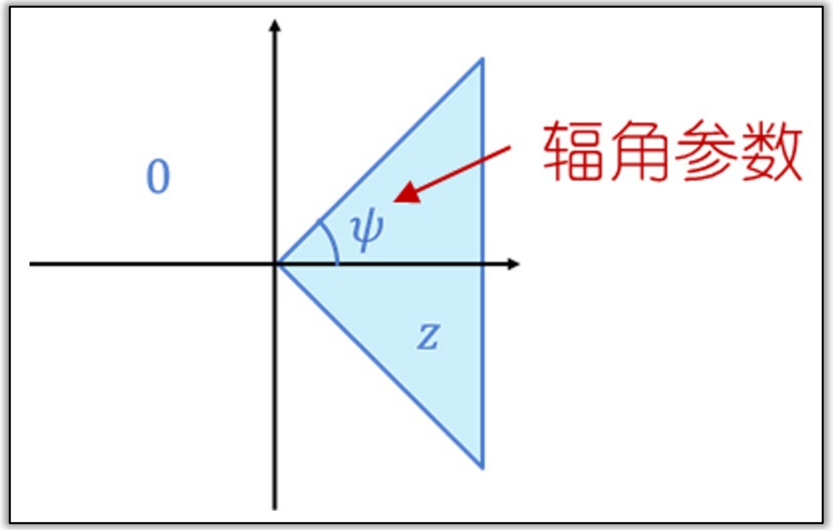
☹ 参数的区间约束

➢ $\psi \in [0, \pi/2]$

☹ 更慢的收敛速率

➢ 全局最优解附近关于ψ近似满足$L \approx (\psi - \psi^*)^3$

➢ 高效的线性收敛要求强凸（二次函数）



☺ 重参数化

➢ 替换后的新参数具有不同的定义域和最优解附近的局部函数性质

[Wu et al., 2026] Reparameterized complex-valued neurons can efficiently learn more than real-valued neurons via gradient descent

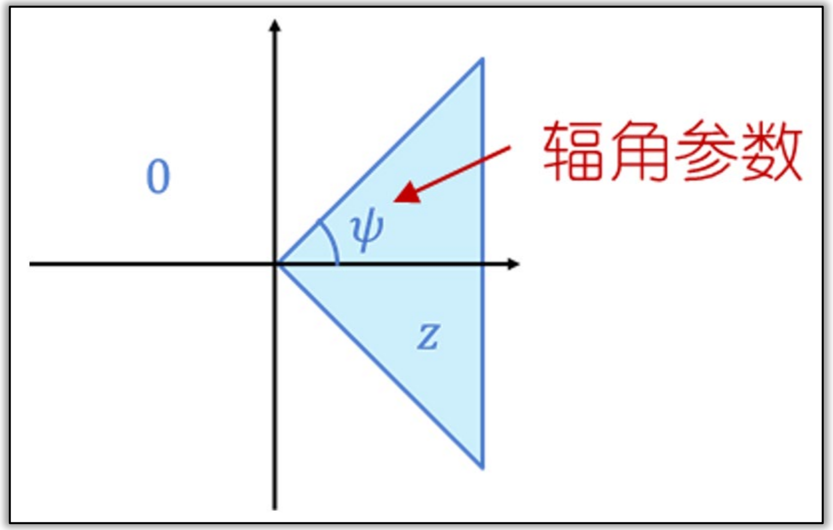
研究III：复值参数学习算法

辐角参数的重参数化

$$\psi(\phi)=\frac{\pi}{2}\left[1-g(\phi)^{2/3}\right]$$

✓ 初等函数可高效计算

✓ $\mathrm{ran}(g)=[-1,1]$，即可消去区间约束



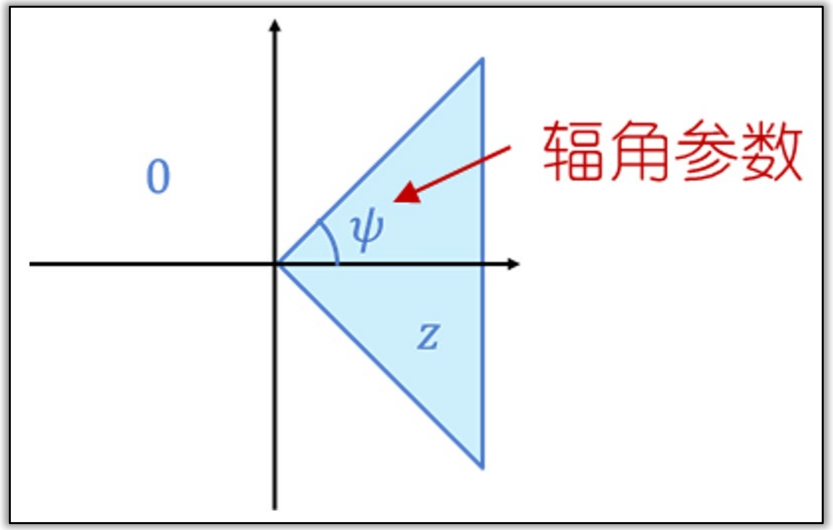
[Wu et al., 2026] Reparameterized complex-valued neurons can efficiently learn more than real-valued neurons via gradient descent

研究III：复值参数学习算法

辐角参数的重参数化

$$\psi(\phi) = \frac{\pi}{2}\left[1 - g(\phi)^{2/3}\right]$$

- ✓ 初等函数可高效计算
- ✓ $\mathrm{ran}(g) = [-1,1]$，即可消去区间约束
- ✓ $g(0) = 0$且$g'(0) \neq 0$，即可保证局部收敛性
- ✓ 2/3次方将最优解附近从辐角参数误差的三次函数变为二次函数，满足强凸性
- ✓ g：正弦函数、双曲正切函数等



[Wu et al., 2026] Reparameterized complex-valued neurons can efficiently learn more than real-valued neurons via gradient descent

研究III：复值参数学习算法

辐角参数的重参数化

$$\psi(\phi) = \frac{\pi}{2}\left[1 - g(\phi)^{2/3}\right]$$

☺ 重参数化后收敛速率与实值神经元相同

神经元	学习实值神经元速率	
重参数化复值神经元	$O(\exp(-c_2 t))$	线性收敛
复值神经元	$\Omega(t^{-3})$	次线性收敛
实值神经元	$O(\exp(-c_1 t))$ [Yehudai & Shamir, 2020]	线性收敛

[Wu et al., 2026]

[Wu et al., 2026] Reparameterized complex-valued neurons can efficiently learn more than real-valued neurons via gradient descent
[Yehudai & Shamir, 2020] Learning a single neuron with gradient methods

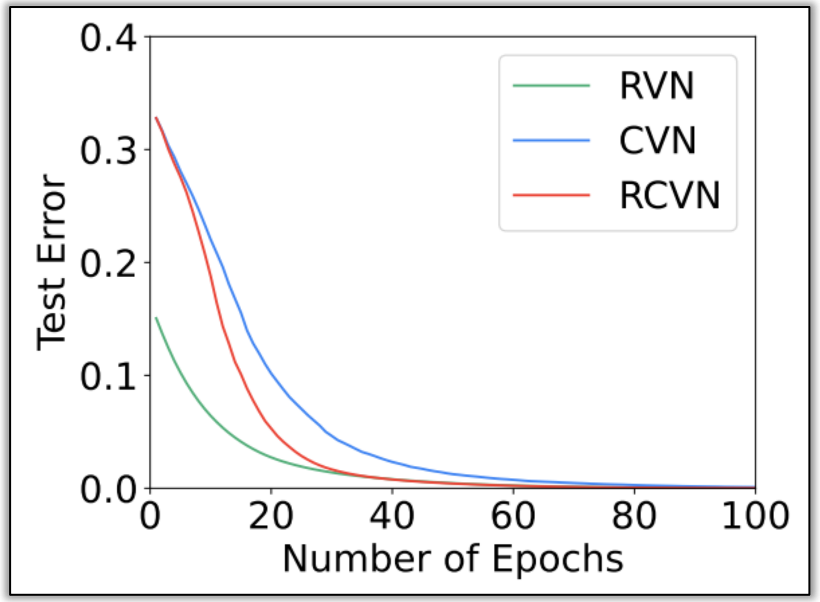
研究III：复值参数学习算法

辐角参数的重参数化

$$\psi(\phi) = \frac{\pi}{2}\left[1 - g(\phi)^{2/3}\right]$$

神经元	学习实值神经元速率
重参数化复值神经元	$O(\exp(-c_2 t))$
复值神经元	$\Omega(t^{-3})$
实值神经元	$O(\exp(-c_1 t))$ [Yehudai & Shamir, 2020]

[Wu et al., 2026]



重参数化可以提升辐角参数学习效率

[Wu et al., 2026] Reparameterized complex-valued neurons can efficiently learn more than real-valued neurons via gradient descent
[Yehudai & Shamir, 2020] Learning a single neuron with gradient methods

研究III：复值参数学习算法

辐角参数的重参数化

$$\psi(\phi) = \frac{\pi}{2}\left[1 - g(\phi)^{2/3}\right]$$

神经元	学习复值神经元速率
重参数化复值神经元	$O(t^{-1})$
复值神经元	$O(t^{-1})$
实值神经元	无法学习

[Wu et al., 2026]

☺ 重参数化后学习能力与复值神经元相同

可学

可学

不可学

[Wu et al., 2026] Reparameterized complex-valued neurons can efficiently learn more than real-valued neurons via gradient descent

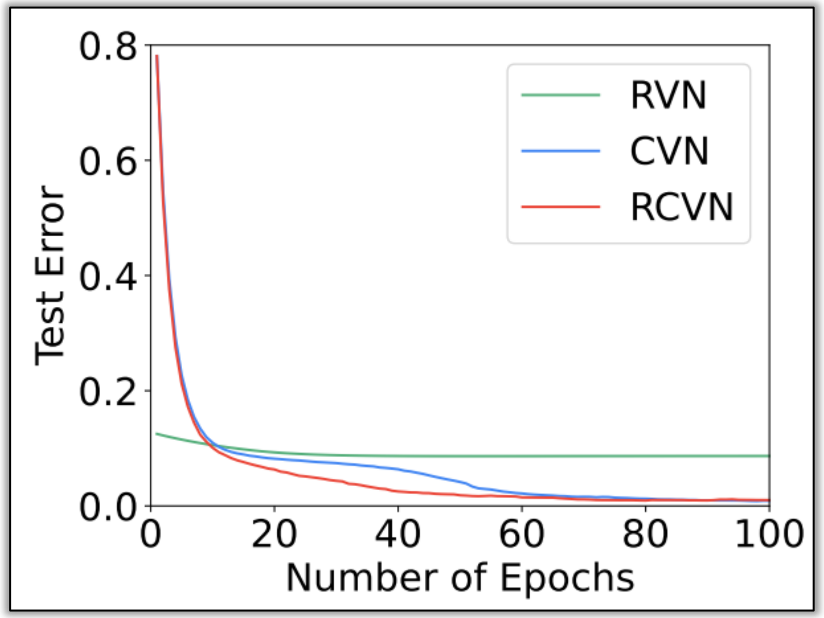
研究III：复值参数学习算法

辐角参数的重参数化

$$\psi(\phi) = \frac{\pi}{2}\left[1 - g(\phi)^{2/3}\right]$$

神经元	学习复值神经元速率
重参数化复值神经元	$O(t^{-1})$
复值神经元	$O(t^{-1})$
实值神经元	无法学习

[Wu et al., 2026]



重参数化可以保持
复值模型学习能力

[Wu et al., 2026] Reparameterized complex-valued neurons can efficiently learn more than real-valued neurons via gradient descent

总结与展望

复值运算 = 复值激活 + 复值参数

- ✓ 复值激活函数和复值矩阵乘法能提升神经网络逼近效率
  [Wu et al., 2024]
- ✓ 复值激活函数能提升神经网络学习相位相关函数的能力
  [Wu et al., 2023]
- ✓ 重参数化可以提升辐角参数学习速率并能保持学习能力
  [Wu et al., 2026]

总结与展望

复值运算 = 复值激活 + 复值参数

✓ 复值激活函数和复值矩阵乘法能提升神经网络逼近效率
[Wu et al., 2024]

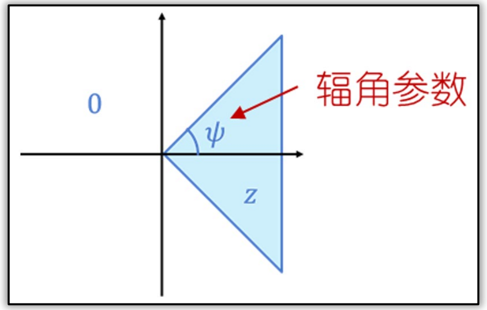
✓ 复值激活函数能提升神经网络学习相位相关函数的能力
[Wu et al., 2023]

✓ 重参数化可以提升辐角参数学习速率并能保持学习能力
[Wu et al., 2026]

? 单隐层→深层网络

? 非连续→连续函数

? 高效学习算法实现



$$\frac{\pi}{2}[1 - g(\phi)^{2/3}]$$

总结与展望

复值运算 = 复值激活 + 复值参数

✓ 复值激活函数和复值矩阵乘法能提升神经网络逼近效率
[Wu et al., 2024]

✓ 复值激活函数能提升神经网络学习相位相关函数的能力
[Wu et al., 2023]

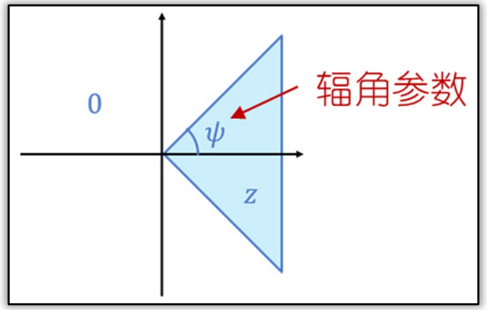
✓ 重参数化可以提升辐角参数学习速率并能保持学习能力
[Wu et al., 2026]

? 单隐层→深层网络

? 非连续→连续函数

? 高效学习算法实现

Thanks!



$$\frac{\pi}{2}\left[1 - g(\phi)^{2/3}\right]$$